ДЗ 1

№2 $u_t = a^2 u_{xx} - b(u - u_0)$

Сделаем замену $u = e^{-bt} v + u_0$

$$-be^{-bt} v + e^{-bt} v_t = a^2 (e^{-bt} v_{xx}) - b(e^{-bt} v + u_0 - u_0)$$

$$\underline{-be^{-bt}} v + e^{-bt} v_t = a^2 e^{-bt} v_{xx} \underline{- be^{-bt}}$$

$$e^{-bt} v_t = a^2 e^{-bt} v_{xx} \quad \Big| : e^{-bt} > 0$$

$$u_t = a^2 v_{xx}$$

№10
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < x < l, \quad 0 < t \\ u(0,t) = u_1 & \\ u(l,t) = u_2 & 0 \le t \\ u(x,0) = u_0 \cdot x & 0 \le x \le l \end{cases}$$
— математическая постановка

Классическое решение:

$$u \in C([0,l] \times [0,T]) \cap C^1_t((0,T)) \cap C^2_x((0,l))$$

Условия сопряжения:

$$u(0,0) = u_1 = u_0 \cdot x \Big|_{x=0} = 0$$

$$u(l,0) = u_2 = u_0 \cdot x \Big|_{x=l} = u_0 \cdot l$$

В общем случае не выполняются

к замечанию

№11
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} - \underbrace{b(u - u_{среды})}_{\text{теплообмен по з. Ньютона}} & \\ u_x(0,t) = 0 \quad \text{(теплоизолирован)} & 0 \le t \\ u(l,t) = u_{среды} \quad \text{(поддерживается при } u_{ср}\text{)} & 0 \le t \le T \\ u(x,t) = u_0 & 0 \le x \le l \end{cases}$$

№15
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + c & 0 < t \quad 0 < x < l \\ u(0,t) = 0 & \\ u(l,t) = 0 & 0 \le t \\ u(x,t) = 0 & 0 \le x \le l \end{cases}$$

№16
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + c & 0 < t \quad 0 < x < l \\ u_x(0,t) = 0 & \\ u_x(l,t) = 0 & 0 \le t \\ u(x,t) = 0 & 0 \le x \le l \end{cases}$$

№17

I-I
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < t, \ 0 < x < l \\ u(0,t) = \mu_1(t) & 0 \le t \\ u(l,t) = \mu_2(t) & 0 \le t \\ u(x,0) = \varphi(x) & 0 \le x \le l \end{cases}$$

Делаем замену $u = v + \frac{\mu_2 - \mu_1}{l} x + \mu_1$

Дз 1 № 17 продолжение

$$\begin{cases} v_t + \frac{\mu_{2t} - \mu_{1t}}{l} x + \mu_{1t} = a^2 v_{xx} \\ v(0,t) = 0 \\ v(l,t) = 0 \\ v(x,0) + \frac{\mu_2(0) - \mu_1(0)}{l} x + \mu_1(0) = \varphi(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} - \frac{(\mu_2(t))'_t - (\mu_1(t))'_t}{l} x - (\mu_1(t))'_t \\ v(0,t) = 0 \\ v(l,t) = 0 \\ v(x,0) = \varphi(x) - \frac{\mu_2(0) - \mu_1(0)}{l} x - \mu_1(0) \end{cases}$$

I – II

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(0,t) = \mu_1(t) \\ u_x(l,t) = \mu_2(t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \quad \text{замена } u = v + \mu_2(t) x + \mu_1(t) \Rightarrow \begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} - (\mu_2(t))'_t x - (\mu_1(t))'_t \\ v(0,t) = 0 \\ v_x(l,t) = 0 \\ v(x,0) = \varphi(x) - \mu_2(0) x - \mu_1(0) \end{cases}$$

II – I

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u_x(0,t) = \mu_1(t) \\ u(l,t) = \mu_2(t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \quad \text{замена } u = v + \mu_1(t) x - l\mu_1(t) + \mu_2(t) \Rightarrow \begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} - (\mu_1(t))'_t x + l(\mu_1(t))'_t - (\mu_2(t))'_t \\ v_x(0,t) = 0 \\ v(l,t) = 0 \\ v(x,0) = \varphi(x) - \mu_1(0) x + l\mu_1(0) - \mu_2(0) \end{cases}$$

II – II

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u_x(0,t) = \mu_1(t) \\ u_x(l,t) = \mu_2(t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \quad \text{замена } u = v + \frac{\mu_2 - \mu_1}{2l} x^2 + \mu_1 x = v + U(x,t) \Rightarrow \begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} - (U(x,t))'_t + a^2 \frac{\mu_2 - \mu_1}{l} \\ v_x(0,t) = 0 \\ v_x(l,t) = 0 \\ v(x,0) = \varphi(x) - U(x,0) \end{cases}$$